

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011

CLASA a IX-a – BAREMURI

Problema 1. Fie n un număr natural nenul și fie numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n astfel încât $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \geq m + (m+1) + \dots + n$, oricare ar fi $m = 1, 2, \dots, n$. Să se arate că $a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soluție. Notăm $b_k = a_k - k, \forall k = 1, 2, \dots, n$. Avem

$$b_m + b_{m+1} + \dots + b_n \geq 0, \text{ pentru orice } m = 1, 2, \dots, n.$$

..... **2 puncte**

Rezultă că

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 + \sum_{i=1}^n 2ib_i + \sum_{i=1}^n i^2 \geq$$

..... **2 puncte**

$$\geq \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

..... **1 punct**

deoarece

$$\sum_{i=1}^n ib_i = (b_1 + \dots + b_n) + (b_2 + \dots + b_n) + \dots + b_n \geq 0.$$

..... **2 puncte**

Problema 2. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că orice număr natural nenul, mai mic sau egal cu $n!$, este suma a cel mult n divizori distincți ai numărului $n!$.

Soluție. Demonstrăm prin inducție după n . Cazul $n = 1$ este evident. Presupunând că afirmația este adevărată pentru n , fie $m \leq (n+1)!$.

Există $q, r \in \mathbb{N}$ cu $m = (n+1)q + r, 0 \leq r \leq n$.

..... **2 puncte**

Rezultă că $q \leq n!$.

..... **1 punct**

Din inducție, q se scrie ca suma a (cel mult) n divizori ai lui $n!$ – fie aceștia $d_1, \dots, d_k, k \leq n$.

..... **1 punct**

Atunci $(n+1)q$ se scrie $(n+1)d_1 + (n+1)d_2 + \dots + (n+1)d_k$, unde $(n+1)d_i$ este un divizor al lui $(n+1)!$.

..... **1 punct**

Dacă $r = 0$, problema este rezolvată;

..... **1 punct**

dacă $r > 0$, cum r divide $(n + 1)!$ și $r < n + 1 \leq (n + 1)d_i$, rezultă că m se scrie ca suma a $k + 1$ divizori distincți ai lui $(n + 1)!$, unde $k + 1 \leq n + 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

..... **1 punct**

Problema 3.

Fie ABC un triunghi și fie I_a centrul cercului exînscribit corespunzător lui A . Fie P și Q punctele de tangență a cercului exînscribit cu dreptele AB și AC . Dreapta PQ intersectează dreptele I_aB și I_aC în punctele D , respectiv E . Notăm cu A_1 punctul de intersecție a dreptelor DC și BE și definim analog punctele B_1 și C_1 . Să se arate că AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente.

Soluție. Vom arăta că A_1 este ortocentrul triunghiului I_aBC .

Pentru aceasta, vom demonstra că $\angle PEI_a = \angle PBI_a$. Într-adevăr, $\angle PEI_a = 180^\circ - \angle PQA - \angle ECQ = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}A) - (90^\circ - \frac{1}{2}C) = \frac{1}{2}(A + C) = 90^\circ - \frac{1}{2}B = \angle PBI_a$.

..... **2 puncte**

Rezultă că BEI_aP este patrulater inscriptibil, și cum $\angle BPI_a = 90^\circ$, avem $BE \perp CI_a$.

..... **2 puncte**

Deducem că $BA_1 \parallel CI$, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Raționând analog rezultă că $BICA_1$ este paralelogram.

..... **1 punct**

Analog $AIBC_1$ este paralelogram, deci și AC_1A_1C este paralelogram, adică segmentele AA_1 și CC_1 se înjumătățesc. Similar, segmentul BB_1 are același mijloc cu AA_1 și CC_1 , de unde rezultă cerința.

..... **2 puncte**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Să se demonstreze că cel puțin unul dintre numerele $[2^n\sqrt{2}]$, $[2^{n+1}\sqrt{2}]$, ..., $[2^{2n}\sqrt{2}]$ este par.

($[a]$ înseamnă partea întregă a numărului real a .)

Soluție. Să presupunem prin absurd că toate numerele sunt impare. Atunci există $a \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$2a - 1 < 2^n\sqrt{2} < 2a.$$

Înmulțind cu 2 obținem $4a - 2 < 2^{n+1}\sqrt{2} < 4a$; cum $[2^{n+1}\sqrt{2}]$ este număr impar, deducem că $4a - 1 < 2^{n+1}\sqrt{2} < 4a$.

..... **1 punct**

Continuând analog, rezultă că $2^{n+1}a - 1 < 2^{2n}\sqrt{2} < 2^{n+1}a$,

..... **1 punct**

de unde $a - 2^{n-1}\sqrt{2} < \frac{1}{2^{n+1}}$.

..... **1 punct**

De aici rezultă $\frac{a^2 - 2^{2n-1}}{a + 2^{n-1}\sqrt{2}} < \frac{1}{2^{n+1}}$.

..... **1 punct**

Pe de altă parte, din $2a > 2^n\sqrt{2}$ rezultă $a^2 > 2^{2n-1}$, ceea ce implică $a^2 - 2^{2n-1} \geq 1$.

..... **1 punct**

Rezultă că $\frac{1}{a + 2^{n-1}\sqrt{2}} < \frac{1}{2^{n+1}}$, deci

$$2^{n+1} < 2^{n-1}\sqrt{2} + a < 2^{n-1}\sqrt{2} + \frac{2^n\sqrt{2} + 1}{2} \Rightarrow$$

$$2^{n+2} < 2^{n+1}\sqrt{2} + 1 \Rightarrow$$

$$2 < \sqrt{2} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2},$$

contradicție.

..... **2 puncte**